Aula 19

Teorema (Picard-Lindelöf): Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, localmente lipschitziana na variável $\mathbf{y}$ e $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Então, o problema de valor inicial para a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

tem solução única num intervalo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, para algum $\varepsilon > 0$.

Nas mesmas condições, a solução pode ser prolongada de forma única a um intervalo máximo de definição $]T_0, T_1[$ tal que $(t, \mathbf{y}(t)) \to \partial\Omega$ quando $t \to T_0^+$ e $t \to T_1^-$.

Definição: Dado um conjunto não vazio qualquer $X \neq \emptyset$ e uma função $d : X \times X \to [0, +\infty[$, diz-se que (X, d) é um **espaço métrico** se a função d satisfaz, para quaisquer $x, y, z \in X$,

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Chama-se **distância ou métrica** a uma tal função.

Definição: Dada uma sucessão $\{x_n\}$ de elementos num espaço métrico (X, d), diz-se que é uma **sucessão de Cauchy** se satisfaz

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Diz-se que um espaço métrico é **completo** se toda a sucessão de Cauchy é convergente.

Proposição: O conjunto $C(I)$ das funções contínuas $\mathbf{y} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de um intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$ para $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo, com a distância

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \max_{t\in I} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\|.$$

A convergência de sucessões de funções neste espaço métrico é equivalente à convergência uniforme.

Definição: Dado um espaço métrico (X, d), em que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é a função distância, ou métrica, e uma aplicação $T : X \to X$, diz-se que T é uma **contração** se existe $0 \leq K < 1$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq K d(x, y).$$

Diz-se que $x \in X$ é um **ponto fixo** de T se $Tx = x$.

Teorema do Ponto Fixo (Banach): Seja (X, d) um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração. Então, T tem um ponto fixo em X e ele é único. Esse ponto fixo pode ser obtido pelo limite da sucessão recursiva

$$\lim_n x_n = \lim_n T^n(x_0) = \lim_n \underbrace{T(T(T(\cdots T}_{n}(x_0)))$$

para qualquer ponto inicial $x_0 \in X$.

Sistemas Lineares de EDOs de 1ª Ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \qquad A(t), \mathbf{b}(t) \text{ contínuos em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(y) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + a_{1,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) = a_{2,1}(t)y_1(t) + a_{2,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)y_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + a_{n,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

$$a_{i,j}(t), b_j(t) \text{ contínuos em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

com condição inicial

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}$$

Proposição: Sejam $A(t), \mathbf{b}(t)$ respectivamente, uma matriz $n \times n$ e um vector $n \times 1$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, o problema de valor inicial para o sistema linear de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

com $t_0 \in I$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, tem solução única com intervalo de definição máximo I.

Sistemas Lineares de EDOs de 1ª Ordem Homogéneos

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} \qquad A(t) \text{ contínua em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(y) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + a_{1,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)y_n(t) \\ y_2'(t) = a_{2,1}(t)y_1(t) + a_{2,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)y_n(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + a_{n,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)y_n(t) \end{cases}$$

$a_{i,j}(t)$ contínuos em $t \in I \subset \mathbb{R}$

com condição inicial

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}$$

Proposição: Seja $A(t)$ uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, o conjunto das soluções do sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y}$$

constitui um espaço vectorial de dimensão n.
O teorema de Picard-Lindelöf garante a existência de um isomorfismo linear entre o espaço vectorial dos dados iniciais $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ para algum $t_0 \in I$ e o espaço vectorial das soluções.

Sistemas Lineares de EDOs de 1ª Ordem
Homogéneos de Coeficientes Constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \qquad a_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Proposição: Seja A uma matriz $n \times n$ constante com entradas reais. Então,

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v},$$

é solução do sistema linear homogéneo de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$$

se e só se λ e $\mathbf{v}$ são, respectivamente, valor e vector próprio associado da matriz A.